"El número e y algunas características"

Asdrúbal Enrique Beltrán Herrera
asbeltran@.uan.edu.co
Lic. Matemáticas
Universidad Antonio Nariño

Resumen

Estas notas pretenden mostrar la definición, irracionalidad y trascendencia del número e, a traves de una serie de aclaraciones, sobre aspectos que los autores citados en este documento dejan entre líneas.

Comenzaremos basados principalmente en Walter Rudin, para hablar sobre la definición e irracionalidad de e y finalmente expondre la trascendencia de e basados en el autor Israel Nathan Herstein y un fragmento de su libro "Topics in Algebra".

1. El número $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Según el libro "Principles of mathematical Analysis", third edition de Walter Rudin, página 63, dice:
El Número e
3.30 Definición

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, con $n \geq 1$ y $0! = 1$ luego

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

la serie converge y la definición tiene sentido....

Aclaración 1. *Probaremos por inducción que la serie*

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Si $n = 2 \Longrightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1 + \frac{1}{2}$, *Si* $n = 4 \Longrightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

Lo asumimos para n *y lo demostramos para* $n + 1$*: Vemos que*

$$1+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad y \quad \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

Luego basta probar que $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!}$ *pues por hipotesis de inducción ya tenemos que* $1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. *Nuevamente utilizaremos inducción para ver que* $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!}$*:*
Si $n=1 \Longrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, *Si* $n=2 \Longrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Lo asumimos para n *es decir la hipotesis de inducción es* $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!}$ *y lo probaremos para* $n+1$. *Para todo* $n > 0$ *se tiene que:*

$$n+2 > 2 \Longrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow \frac{1}{(n+2)!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Por lo tanto se concluye que $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!}$, *y por tanto:*

$$1+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n > \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

entonces

$$1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Por otro lado la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, *converge a* $\frac{1}{1-x}$ *si* $\mid x \mid < 1$. *En este termino de ideas la serie*

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

Es de notar que dicha serie cortada en su n-ésimo termino a de ser menor que la serie infinita que converge a 3, *quedando aclarada completamente la cadena de desigualdades. Por otro lado Rudin dice que la serie que define a el número e a de converger, apoyandose en el teorema 3.24 de la página 60 que dice: "Una serie de terminos positivos converge si y solo si sus sumas parciales forman una sucesión acotada.", claro tal sucesión de sumas parciales a de estar acotada por 3.*

2. El número $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Sigue diciendo Rudin en la página 64: "Es de interes notar que e se puede definir por medio de otro proceso de límites; la prueba provee una buena ilustración sobre las operaciones con límites:

3.31 Teorema

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Prueba sea:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Por el teorema del binomio

$$t_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Entonces $t_n \leq S_n$"

Aclaración 2. *La idea es probar primero que:*

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\} \qquad (\clubsuit)$$

Como dato de interes este ejercicio aparece propuesto en el calculo de Apostol Vol 1, segunda edición, página 56 ejercicio 12. (a).

Según el teorema del binomio, aplicado a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tenemos que:*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \qquad (\spadesuit)$$

Veremos que las dos series son exactamente iguales, esto lo tendremos mostrando que los n-ésimos terminos de las dos series son exactamente iguales:

Si $n=0 \Longrightarrow \clubsuit = 1$ *y* $\spadesuit = 1$

Si $n=1 \Longrightarrow \clubsuit = 1+1$ *y* $\spadesuit = 1+1$

Si $n=2 \Longrightarrow \clubsuit = 1+1+\frac{1}{4}$ *y* $\spadesuit = 1+1+\frac{1}{4}$

Ahora bien el n-ésimo termino para $1+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}$ *es:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\prod_{r=0}^{n-1}\left(1-\frac{r}{n}\right) &= \frac{1}{n!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\\
&= \frac{1}{n\cdot n^{n-1}}\\
&= \frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$

Y el n-ésimo termino para $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$ *es:*

$$\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n^n}$$

Por tanto

$$1+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=t_n$$

Ahora mostraremos que $t_n\leq S_n$. *Es muy facil ver que cada termino de* t_n *es menor o igual que cada termino de* S_n

$$S_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$t_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Podemos apreciar que los dos primeros terminos de cada serie son iguales y despues del segundo termino, cada termino de t_n *es equivalente en orden estricto al termino* s *de* S_n *multiplicado por un número* t *positivo y menor que* 1. *Podemos ver que si:*

$$s>0\quad y\quad 0<t<1\Longrightarrow s\cdot t<s$$

Que es el caso de cada termino de t_n *en comparación con cada termino de* S_n, *por lo tanto* $t_n\leq S_n$.

Y continua diciendo: "de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e \tag{14}$$

por el teorema 3.19."

Aclaración 3. *En la página 57 el teorema 3.19 dice: Si $s_n \leq t_n$ para $n \geq N$, donde N es fijo, entonces:*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} s_n &\leq \limsup_{n\to\infty} t_n \\ \liminf_{n\to\infty} s_n &\leq \liminf_{n\to\infty} t_n \end{aligned}$$

En nuestro caso $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n$ y como dice en la página 57 el ejemplo c), $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ sii $\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s$. De lo anterior tenemos entonces que:

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n = e$$

Ahora, si $n \geq m$,

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

Aclaración 4. *Esto es claro pues la sucesión t_n a de tener más terminos que la sucesión t_m pues $n \geq m$*

Sea $n \to \infty$, tomando m fijo. Se obtiene

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

de modo que

$$S_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$$

Aclaración 5. *Tenemos que:*

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Si $n \to \infty$ cada factor $\left(1 - \frac{k}{n}\right) \to 1$, por tanto cada termino de la serie tiende a $\frac{1}{k!}$, si tomamos m fijo entonces tenemos que $S_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$ ya que t_n tiene más terminos(infinitos) que S_m y son tan proximos a $\frac{1}{k!}$ como se desee ya que $n \to \infty$.

Si se hace $m \to \infty$ tenemos finalmente que:

$$e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \tag{15}$$

El teorema se deduce de (14) y (15).

Aclaración 6. *Es sabido que* $\liminf_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n$ *y por* (14) *y* (15) *podemos concluir que* $e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \leq e$ *por tanto* $\lim_{n\to\infty} t_n = e$.

La rapidez con que converge la serie $\sum \frac{1}{n!}$ puede comprobarse como sigue: Si S_n es como se definió anteriormente, tendremos:

$$\begin{aligned} e - S_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

de modo que

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \tag{16}$$

Aclaración 7. *Vemos que*

$$\begin{aligned} (n+1)!(n+1) &< (n+1)!(n+2) = (n+2)! \\ (n+1)!(n+1)(n+1) &< (n+1)!(n+2)(n+3) = (n+3)! \\ &\vdots \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{1}{(n+1)!(n+1)} > \frac{1}{(n+2)!}, \quad \frac{1}{(n+1)!(n+1)(n+1)} > \frac{1}{(n+3)!} \cdots$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!} &< \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)^2}+\cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\end{aligned}$$

Cuando $n \geq 1$ *la serie geométrica* $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k$ *converge a:*

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

teniendose que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\} &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n!n}\end{aligned}$$

3. Irracionalidad de e

Y despues de esto Rudín afirma: "Así, por ejemplo, S_{10} da una aproximación de e con un error menor a 10^{-7}. La desigualdad (16) tiene además interés teórico, pues nos permite demostrar la irracionalidad de e con mucha facilidad."

3.32 Teorema e es irracional

Prueba Supongase que e es racional. Entonces $e = p/q$, donde p y q son enteros positivos. por (16),

$$0 < q!(e - S_q) < \frac{1}{q} \qquad (17)$$

Por la hipótesis hecha, $q!e$ es entero. Como

$$q!S_q = q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

es un entero, vemos que $q!(e - S_q)$ es un entero.

Cuando $q \geq 1$, (17) implica la existencia de un entero entre 0 y 1, con lo que hemos llegado a una contradicción.

Aclaración 8. *Tenemos que* $q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p$*, y producto de enteros es un entero. Tambien tenemos que*

$$\begin{aligned} q!S_q &= q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right) \\ &= q!+q!+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}\cdots+\frac{q!}{q!} \\ &= 2q!+\frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdots q}{2!}+\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdots q}{3!}+\cdots+1 \\ &= 2q!+3\cdot 4\cdots q+4\cdot 5\cdots q+\cdots+1 \end{aligned}$$

y una suma de enteros a de ser un entero. Por lo tanto $q!(e-S_q) = q!e - q!S_q$*, es una diferencia de enteros que es entera, como* $\frac{1}{q} \leq 1$ *entonces*

$$\begin{aligned} 0 < q!(e-S_q) &< \frac{1}{q} \\ &< 1 \end{aligned}$$

tenemos un entero entre 0 *y* 1 *lo cual es contradictorio.*

4. La trascendencia de e

Este tema de e lo termina Rudin diciendo: "Actualmente e no es un número algebráico. Para una prueba simple de esto, vease la página 25 del libro de Niven, o la página 176 de Herstein, citada en la Bibliografía."

Bueno pues para no dejar este temita en el tintero, decidí investigar tales libros. La trascendencia de e es demostrada en los libros Topics in Algebra de Herstein pagina 217 (227pdf) según la versión que descargue de la red, y en Irrational Numbers de Ivan Niven pag 25 y en la página 131 (143djvu) Niven la hace como una aplicación del teorema de Lindemann generalizado, lo cual no solamente prueba la trascendencia de e sino tambien de π entre otros. Según el libro de Herstein:

TEOREMA 5.2.1 El número e es trascendente.

Prueba: En la prueba se utiliza la notación estandar $f^{(i)}(x)$ que denota la $i-$ésima derivada de $f(x)$ con respecto a x. Supongase que $f(x)$ es un polinómio de grado r con coeficientes reales.

Sea $F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$. Calcuremos $(d/dx)(e^{-x}F(x))$; usando el hecho que $f^{(r+1)}(x) = 0$ (pues $f(x)$ es de grado r) y la propiedad básica de e que dice que $(d/dx)e^x = e^x$, se obtiene que $(d/dx)(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$.

Aclaración 9. *Bueno en mi opinión Herstein hace una muy buena exposición de la prueba más sin embargo. Por definición tenemos que:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
[e^x]' &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right]' \\
&= \left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right]' \\
&= 0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}+\frac{(n+1)x^n}{(n+1)!}+\cdots \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Tambien tenemos que si

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$$

entonces

$$F'(x) = f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x) + \cancelto{0}{f^{(r+1)}(x)}$$

el ultimo termino es cero según lo explicado por Herstein. Por ende

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)(e^{-x}F(x)) &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) \\
&= -e^{-x}(F(x) - F'(x)) \\
&= -e^{-x}\left[f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x) - \left(f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x)\right)\right] \\
&= -e^{-x}\left[f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x) - f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x) - f^{(3)}(x) - \cdots - f^{(r)}(x)\right] \\
&= -e^{-x}f(x)
\end{aligned}$$

El teorema del valor medio asegura que si $g(x)$ es una función de una variable, continua y diferenciable en el cerrado $[x_1, x_2]$, entonces

$$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = g^{(1)}\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right), \quad \text{Para algún } \theta, \quad 0 < \theta < 1$$

Aclaración 10. *En la versión conocida del Teorema del valor medio dice que ...existe un $c \in (x_1, x_2)$ que cumple la condición, vemos que es equivalente lo que explica Herstein pues el número $x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ con $0 < \theta < 1$ siempre es un número de este intervalo abierto.*

Aplicamos esto ahora a la función $e^{-x}F(x)$, que ciertamente satisface todas las condiciones requeridas del teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ con $x_1 = 0$ y $x_2 = k$, donde k es cualquier entero positivo. Entonces obtenemos que $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k k}f(\theta_k k)k$, donde θ_k es algún número real que depende de k y se encuentra entre 0 y 1. Multiplicando esta igualdad a ambos lados por e^k tenemos $F(k) - e^k F(0) = -e^{(1-\theta_k)k}f(\theta_k k)k$. Si escribimos esto explicitamente para los primeros n enteros positivos tenemos:

$$
\begin{aligned}
&F(1) - eF(0) = -e^{(1-\theta_1)} f(\theta_1) = \varepsilon_1 \\
&F(2) - e^2 F(0) = -2e^{2(1-\theta_2)} f(2\theta_2) = \varepsilon_2 \qquad (1) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&F(n) - e^n F(0) = -ne^{n(1-\theta_n)} f(n\theta_n) = \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

Aclaración 11. *Bastante bien explicado pero veamos que, si* $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = g^{(1)}\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right)$*, y ademas* $x_1 = 0$ *y* $x_2 = k$*, tambien anteriormente se vio que* $\left(\frac{d}{dx}\right)\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}f(x)$*, si llamamos* $g(x) = e^{-x}F(x)$ *entonces tenemos:*

$$
\begin{aligned}
\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} &= g^{(1)}\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right) \\
\frac{-(g(x_1) - g(x_2))}{-(x_1 - x_2)} &= g^{(1)}\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right) \\
\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} &= g^{(1)}\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right) \\
\frac{g(k) - g(0)}{k - 0} &= g^{(1)}\left(0 + \theta_k(k - 0)\right) \\
\frac{g(k) - g(0)}{k - 0} &= g^{(1)}\left(\theta_k k\right) \\
\frac{e^{-k}F(k) - e^0 F(0)}{k} &= -e^{\theta_k k} f(\theta_k k) \\
\frac{e^{-k}F(k) - F(0)}{k} &= -e^{\theta_k k} f(\theta_k k) \\
e^{-k}F(k) - F(0) &= -e^{\theta_k k} f(\theta_k k) k
\end{aligned}
$$

Supongamos que e es un número algebráico; entonces el satisface alguna relación de la forma

$$c_n e^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1 e + c_0 = 0 \qquad (2)$$

Donde $c_0, c_1, ..., c_n$, son enteros positivos y $c_0 > 0$.

Si en la relación (1) multiplicamos la primera ecuación por c_1, la segunda por c_2, y asi sucesivamente, y luego sumamos todas estas ecuaciones obtenemos

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) - F(0) \cdot (c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_n e^n) = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n$$

En la relación (2) vemos que $c_n e^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1 e = -c_0$ y por tanto la ecuación anterior se simplifica en:

$$c_1F(1)+c_2F(2)+\cdots+c_nF(n)+c_0F(0)=c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n \tag{3}$$

Toda esta discución empieza sobre la construcción de $F(x)$ a partir de un polinómio arbitrario $f(x)$. Veremos que implica todo lo anterior usando un polinómio específico, este primeramente utilizado por Hermite[1], sea:

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p$$

Donde p es un primo escogido tal que $p>n$ y $p>c_0$. Para este polinómio hecharemos un vistazo a $F(0),F(1),...,F(n)$ y calcularemos los valores de $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$.

Aclaración 12. *Bueno no tanto como una aclaración una pregunta lógica es ¿como Hermite escoge tal polinómio?, tal vez haga parte del talento matemático que él mismo tenía y de todas los obstaculos que superó para realizar la prueba. Esta parte la dejo abierta para que alguien pueda echarme una manito.*

Cuando expandimos, $f(x)$ este polinómio toma la forma:

$$\frac{(n!)^px^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{a_0x^p}{(p-1)!}+\frac{a_1x^{p+1}}{(p-1)!}+\cdots$$

donde $a_0,a_1,...,$ son enteros.

Aclaración 13. *Vemos que $(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p=[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)]^p$, este $(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$ ha de ser un polinómio de grado n y cuyo termino independiente es igual a $1\cdot2\cdot3\cdots n=n!$, es decir*

$$(1-x)(2-x)\cdots(n-x)=n!+s_0x+s_1x^2+\cdots+x^n$$

Con s_i entero. Si elevamos dicho polinómio a la p obtendremos un nuevo polinómio de grado p así:

$$\begin{aligned}[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)]^p &= [n!+s_0x+s_1x^2+\cdots+x^n]^p\\ &= (n!)^p+a_0x+a_1x^2+\cdots+x^{np}\end{aligned}$$

Con a_i entero, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p &= \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}[(n!)^p+a_0x+a_1x^2+\cdots+x^{np}]\\ &= \frac{(n!)^px^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{a_0x^p}{(p-1)!}+\frac{a_1x^{p+1}}{(p-1)!}+\cdots+\frac{x^{np+p-1}}{(p-1)!}\end{aligned}$$

Continua Herstein diciendo: "Cuando $i\geq p$, se tiene que $f^{(i)}(x)$ es un polinómio con coeficientes enteros todos multiplos de p (Demuestrelo! ver el problema 2)"

[1]Recordemos que la demostración de la trascendencia de e fue realizada por primera vez por Hermite.

Aclaración 14. *Cada termino de dicho polinómio tiene la forma*

$$\frac{a_m x^{p+m}}{(p-1)!} \quad con \quad m \geq 0$$

a excepción del primero quien se hace cero, pues tomaremos la i-ésima derivada de $f(x)$, con $i \geq p$. Por la aditividad de la diferenciación cada termino se transforma en:

$$\begin{aligned}\left[\frac{a_m x^{p+m}}{(p-1)!}\right]^{(i)} &= \frac{(p+m)(p+m-1)(p+m-2)\cdots(p+m-(p-2))(p+m-(p-1))\cdots(p+m-(i-1))a_m x^{p+m-i}}{(p-1)!} \\ &= \frac{(p+m)(p+m-1)(p+m-2)\cdots(p+m-(p-2))}{(p-1)!}(p+m-(p-1))\cdots(p+m-(i-1))a_m x^{p+m-i}\end{aligned}$$

Debemos probar el numerador de $\left[\frac{a_m x^{p+m}}{(p-1)!}\right]^{(i)} = (\blacklozenge)$ es divisible por $(p-1)!$, por lo anterior

$$\frac{\overbrace{(p+m)(p+m-1)(p+m-2)\cdots(p+m-(p-2))}^{\text{son } p-1 \text{ enteros consecutivos}}}{(p-1)!} =$$

$$\frac{(p+m)(p+m-1)(p+m-2)\cdots(p+m-(p-2))(p+m-(p-1))!}{(p-1)!(p+m-(p-1))!} =$$

$$\frac{(p+m)!}{(p-1)!(p+m-(p-1))!} = \binom{p+m}{p-1}$$

El cual es siempre un entero por definición. Como $i \geq p$ entonces esto tambien se cumple en $\blacklozenge$ si el denominador es $p!$, es decir uno de los factores del numerador de $\blacklozenge$ que no se cancela con $(p-1)!$ es multiplo de p ya que p es primo y $(p-1)!$, no lo contiene como factor.

Esto significa que para todo j con $j \geq p$, $f^{(i)}(j)$ es un entero multiplo de p. Ahora como se definió $f(x)$ vemos que cada raíz es de multiplicidad p para $x = 1, 2, 3, ..., n$. En consecuencia para $j = 1, 2, ..., n$, $f(j) = 0$, $f(j)^{(1)} = 0$,...,$f(j)^{(p-1)} = 0$.

Aclaración 15. *Cuando un polinómio $P(x)$ tiene una raíz m de multiplicidad p, esto significa que dicho polinómio tiene la forma $P(x) = (x-m)^p Q(x)$, veremos que esta raíz es tambien raíz hasta la $p-1$ derivada*

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-m)^p Q(x) \\
P^{(1)}(x) &= p(x-m)^{p-1}Q(x) + (x-m)^p Q'(x) \\
&= (x-m)^{p-1}\cdot[pQ(x) + (x-m)Q'(x)] \\
P^{(2)}(x) &= (p-1)(x-m)^{p-2}[pQ(x)+(x-m)Q'(x)] + (x-m)^{p-1}[pQ(x)+(x-m)Q'(x)]' \\
&= (x-m)^{p-2}\cdot\{(p-1)[pQ(x)+(x-m)Q'(x)] + (x-m)[pQ(x)+(x-m)Q'(x)]'\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
P^{(p-1)}(x) &= (x-m)^{p-(p-1)}\{\cdots\} \\
&= (x-m)\{\cdots\}
\end{aligned}$$

Sin embargo, por lo discutido anteriormente:

$$F(j) = f(j) + f^{(1)}(j) + f^{(2)}(j) + \cdots + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + \cdots + f^{(r)}(j)$$

con $j = 1, 2, .., n$, es un entero multiplo de p. ¿Que se puede decir acerca de $F(0)$? Como $f(x)$ tiene una raíz de multiplicidad $p-1$ y es $x=0$, $f(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0$. Para $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ es un entero multiplo de p. (*Pues por lo menos existirá un termino independiente distinto de* $(n!)^p$).

Pero $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ y como $p > n$ y es número primo, $p \nmid (n!)^p$ tenemos que $f^{(p-1)}(0)$ es un entero que no es divisible por p.

Aclaración 16. *Vemos que*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(n!)^p x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{a_0 x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1 x^{p+1}}{(p-1)!} + \cdots + \frac{x^{np+p-1}}{(p-1)!} \\
f^{(p-1)}(x) &= \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2\cdot 1 (n!)^p x^{p-1-(p-1)}}{(p-1)!} + \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2\cdot a_0 x}{(p-1)!} + \cdots + \frac{\alpha x^{np}}{(p-1)!} \\
&= \frac{(p-1)!(n!)^p}{(p-1)!} + \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2\cdot a_0 x}{(p-1)!} + \cdots + \frac{\alpha x^{np}}{(p-1)!} \quad (con \quad \alpha \in \mathbb{Z}^+) \\
&= (n!)^p + \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2\cdot a_0 x}{(p-1)!} + \cdots + \frac{\alpha x^{np}}{(p-1)!} \\
f^{(p-1)}(0) &= (n!)^p + \frac{(p-1)(p-2)\cdots \cancelto{0}{2\cdot a_0 \cdot 0}}{(p-1)!} + \cdots + \frac{\cancelto{0}{\alpha \cdot 0^{np}}}{(p-1)!} = (n!)^p
\end{aligned}$$

Como $F(0) = f(0) + f^{(1)}(0) + f^{(2)}(0) + \cdots + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(r)}(0)$, se concluye que $F(0)$ es un entero que no es divisible por p. Como $c_0 > 0$ y $p > c_0$ y como $p \nmid F(0)$, mientras que $p \mid F(1)$, $p \mid F(2)$,...,$p \mid F(n)$, se puede asegurar que $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n)$ es un entero que no es divisible por p.

Aclaración 17. *Es facil ver que si tenemos una lista de enteros positivos $m_0, m_1, ..., m_i$ todos divisibles por p a excepción de m_0 entonces su suma no es divisible por p. Supongamos que si es decir sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que:*

$$pk = m_0 + m_1 + \cdots + m_i$$

como $p \mid m_j$ para $j = 1, 2, ..., i$ entonces para todo j se tiene que $m_j = pm'_j$, y por tanto

$$\begin{aligned} pk &= m_0 + m_1 + \cdots + m_i \\ pk &= m_0 + pm'_1 + \cdots + pm'_i \\ pk - (pm'_1 + \cdots + pm'_i) &= m_0 \\ p(k - m'_1 - \cdots - m'_i) &= m_0 \end{aligned}$$

Lo cual indica que m_0 es divisible por p y esto es una contradicción.

Por (3), $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n$. ¿Que podemos decir hacerca de ε_i? recordemos que

$$\varepsilon_i = \frac{-ie^{i(1-\theta_i)}(i\theta_i)^{p-1}(1 - i\theta_i)^p(2 - i\theta_i)^p \cdots (n - i\theta_i)^p}{(p-1)!}$$

con $0 < \theta_i < 1$.

Aclaración 18. *Esto se deduce por (1) y por el famoso "polinómio usado por Hermite" citado anteriormente, evaluado en $i\theta_i$.*

Por ende

$$|\varepsilon_i| \leq e^n \frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!}$$

Si $p \to \infty$

$$e^n \frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!} \to 0$$

(Demuestrelo!)

Aclaración 19. *Si $i\theta_i < 1$ entonces todo $k - i\theta_i < k$, por tanto es menor que el factorial. Si $1 < i\theta_i < n$, entonces $i\theta_i = k + t_i$ con $0 < t_i < 1$ y $1 \leq k < n$, entonces veamos que sucede a la derecha e izquierda de $k + 1$, con esta productoria*

$$\begin{aligned} (1 - i\theta_i) \cdots (n - i\theta_i) &= (1 - (k + t_i))(2 - (k + t_i)) \cdots (k - (k + t_i))\underline{(k + 1 - (k + t_i))}(k + 2 - (k + t_i)) \cdots (n - (k + t_i)) \\ &= (1 - (k + t_i))(2 - (k + t_i)) \cdots (-1 - t_i)(-t_i)\underline{(1 - t_i)}(2 - t_i) \cdots (n - (k + t_i)) \\ |(1 - i\theta_i) \cdots (n - i\theta_i)| &= |1 - (k + t_i)| \cdot |2 - (k + t_i)| \cdots |-1 - t_i| \cdot |-t_i| \cdot |1 - t_i| \cdot |2 - t_i| \cdots |n - (k + t_i)| \end{aligned}$$

Para esto ultimo tenemos que se cumple lo siguiente;

$$\underbrace{|1-(k+t_i)|}_{<k}\cdot\underbrace{|2-(k+t_i)|}_{<k-1}\cdots\underbrace{|-1-t_i|}_{<2}\cdot\underbrace{|-t_i|}_{<1}\cdot\underbrace{|1-t_i|}_{<1}\cdot\underbrace{|2-t_i|}_{<2}\cdots\underbrace{|n-(k+t_i)|}_{<m}$$

Como la productoria tiene n factores es claro que $n=k+m$, escogemos el mayor entre k y m, por ejemplo si fuese m, entonces el producto de los factores relacionados con la sucesión hasta m es menor que $m!$, como elegimos $m>k$ entonces $k<(m+1), k-1<(m+2), ..., 2<(n-1), 1<n$, por tanto

$$\begin{aligned}|(1-i\theta_i)\cdots(n-i\theta_i)| &< m!(m+1)(m+2)\cdots(n-1)n\\ &= n!\end{aligned}$$

Tambien tenemos que $i, i\theta_i, i(1-\theta_i)$, son todos y cada uno menores que n, entonces

$$\left|\frac{-ie^{i(1-\theta_i)}(i\theta_i)^{p-1}(1-i\theta_i)^p(2-i\theta_i)^p\cdots(n-i\theta_i)^p}{(p-1)!}\right|\leq\frac{ne^n n^{p-1}\cdot(n!)^p}{(p-1)!}=e^n\frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!}$$

Ahora para probar el límite expondre una prueba análoga a la realizada en la pagina 133 del libro "Curso de análise Vol 1, Décima primeira edição", de Elon Lages Lima, allí él demuestra que $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{a^n}=\infty$, mientras que deseamos probar que $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$. Podemos entonces seleccionar un n_0 lo suficientemente grande tal que $\frac{a}{n_0}<\frac{1}{2}$ y sea $k=\frac{a^{n_0}}{n_0!}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n-n_0\ veces}}{(n_0+1)(n_0+2)\cdots n}\\ &= \lim_{n\to\infty}k\cdot\frac{a}{(n_0+1)}\cdot\frac{a}{(n_0+2)}\cdots\frac{a}{n}\\ &< \lim_{n\to\infty}k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\\ &= \lim_{n\to\infty}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Termina diciendo Herstein: "Por tanto se puede escoger un número primo lo suficientemente grande, (mayor que c_0 y n) tal que $|c_1\varepsilon_1+\cdots+c_n\varepsilon_n|<1$. Pero $c_1\varepsilon_1+\cdots+c_n\varepsilon_n=c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n)$ el cual es siempre un entero, en este caso de valor absoluto menor que 1, en consecuencia $c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n)=0$; pero esto no tiene sentido, ya que se sabe que $p\nmid(c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n))$, mientras que $p\mid 0$. Esta contradicción proviene al asumir que e es algebráico, por tanto e debe ser trascendente." Creo que es lo suficientemente claro, y con esto doy por terminado el análisis del número e.